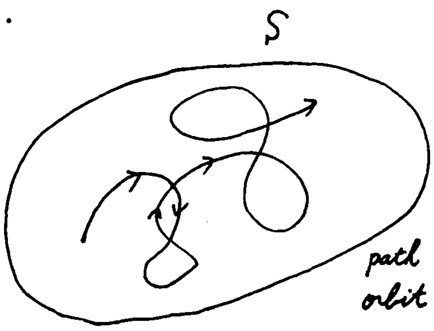
揺動力の観点からみた確率過程論

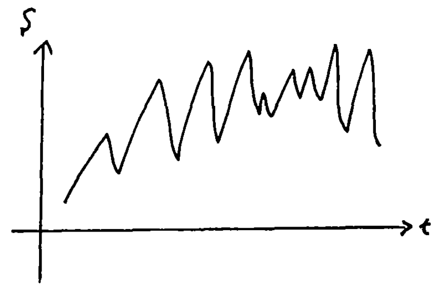
岡部靖憲(北海道大学理学部数学教室)

§1. 確率過程

[定義]　確率過程とは時と共に不規則に変動する現象を数学的に建てたモデル
のことで,

[表現]　確率空間$(\Omega,\mathcal{B},P)$から可測空間$(S,\mathcal{F})$への確率変数$X(t):\Omega\longrightarrow S$の集まりとして与えられ,$\mathbf{X}=(X(t);t\in T)$として表現される.ここで,集合$T,S$はそれぞれ時間域,状態空間とよぶ.





[目的]　確率過程$\mathbf{X}$を研究する目的は,その偶然量を支配する法則を調べ,その普遍的構造を明らかにすることである.

[解析]　確率過程$\mathbf{X}$のもつ法則($\equiv$定性的性質)から$\mathbf{X}$の時間発展を記述する方程式を求め,それを基盤にして解析する.その方程式はおもに確率微分方程式で表現される.

§2. ブラウン運動

確率過程の源はブラウン運動である．これは花粉を水の中に落としたとき，花粉粒子のなかの微粒子が描くジグザグ運動のことで，1828年イギリスの植物学者Brownによって観測された([4]). Einstein([7]), Langevin([15]), Perrin([50]), Ornstein([52]), Uhlenbeck([52]), Doob([5],[6]), Wiener([54]), Lévy([16])の研究によって，ブラ

ウン運動はマルコフ性をもつ確率過程として，数学の研究対象となった．

花粉粒子の運動を確率過程 $\mathbf{X} = (X(t); t \in T)$ とするとき，その時間発展を記述する方程式は

$$\dot{X}(t) = -\beta X(t) + \alpha \dot{B}(t) \tag{2.1}$$

で表現される．ここで，α, β は正の実数，$\mathbf{B} = (B(t); t \in T)$ はブラウン運動である．

時間域の集合 T が半区間 $[0, \infty)$ か全区間 $(-\infty, \infty)$ かに応じて方程式(2.1)を局所的，大域的と名付ける．解 $X(t)$ はブラウン運動による積分(Wiener積分)で表現される：

$$\begin{cases} \text{局所的な場合} \quad X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dB(s) \quad (t \geq 0) \\ \text{大域的な場合} \quad X(t) = \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dB(s) \quad (t \in \mathbf{R}). \end{cases} \tag{2.2}$$

ブラウン運動 $B(*)$ は，局所的あるいは大域的を問わず，つぎの定性的性質で特徴付けられる：

(B-1)　正規性(有限次元分布が正規分布に従う)

(B-2)　独立増分(互いにかさらない増分が独立)

(B-3)　連続な軌跡

方程式(2.1)の解である花粉粒子の運動 $X(*)$ を特徴付ける定性的性質：

[局所的な場合]：

(X-1)　正規性

(X-2)　拡散性(軌跡は連続で強マルコフ性をもつ)

[大域的な場合]：

(X-1)　正規性

(X-2)　拡散性

(X-3)　弱定常性

ここで，弱定常性とは，平均は零 $(E(X(t))=0)$，共分散関数 $E(X(t)X(s))$ が t と s の差の関数 $R(t-s)$ になるときをいう．いまの場合は

$$E(X(t)X(s))=\frac{\alpha^2}{2\beta}e^{-\beta|t-s|}=R(t-s)$$

となるので，関数 R はつぎで与えられる：

$$R(t)=\frac{\alpha^2}{2\beta}e^{-\beta|t|}. \tag{2.3}$$

確率過程論で研究されている確率過程としては，正規性をもつ正規過程，独立増分をもつ加法過程，マルコフ性をもつマルコフ過程，拡散性をもつ拡散過程，弱定常性をもつ弱定常過程，強定常性をもつ強定常過程などがある．解析する手法として，マーチンゲール，確率積分，伊藤解析 ([11])，飛田解析 ([8])，マリアバン解析 ([17])，等があり，確率解析と呼ばれている．

§3. 揺動散逸定理

花粉粒子の運動の研究において，統計物理学の世界では，拡散係数が方程式 (2.1) における定数 β に逆比例するというアインシュタインの関係式が得られた ([7],[50])．それは分子数のアボガドロ数を理論的に予言し，実験的にも確かめられ，久保亮五氏の線形応答理論の中で揺動散逸定理として，非平衡統計物理学における基本原理のひとつになった ([13])． それは方程式 (2.1) における定数 α と β の間にある関係式が成り立つことを主張する．

揺動散逸定理は私には不思議なことだが確率解析の世界では忘れられていた．方程式 (2.1) を解くという観点では，定数 α と β は任意に与えられる．すなわち，

(3.1) はじめにモデルありき

の観点では，揺動散逸定理の背後にある哲学を理解できない．しかし，第 1 章で述べたように，確率過程の解析の立

場である

(3.2) 定性的性質からモデルへ

の観点では,確率過程$\mathbf{X}$の正規性,マルコフ性,弱定常性から,$\mathbf{X}$の時間発展を与える方程式(2.1)が導き出せるのである([37],[38],[39]).方程式(2.1)における定数αとβは確率過程$\mathbf{X}$に対応するのであるから,それらの定数は勝手に与えられるものではない.

アインシュタインの関係式を求めてみよう.(2.3)において,$t=0$として

$$R(0)=\frac{\alpha^2}{2\beta} \tag{3.3}$$

が得られる.これを変形して

$$\frac{\alpha^2}{2}=R(0)\beta \tag{3.4}$$

となる.物理的には$R(0)$は花粉粒子をとりまく系(いまの場合は水溶液)の状態による定数であり

$$R(0)=2kT \tag{3.5}$$

と考えられる(kはボルツマン定数,Tは系の絶対温度).(3.4)は第2種の揺動散逸定理とよばれる.さらに,つぎの量

$$D\equiv\int_0^\infty R(t)dt \tag{3.6}$$

は拡散定数とよばれる.(2.3)の両辺を積分して

$$D=\frac{\alpha^2}{2\beta^2}$$

が得られる.これと(3.4)より

$$D=\frac{R(0)}{\beta} \tag{3.7}$$

が得られる.これがアインシュタインの関係式である.

§4. 定性的性質からモデル:拡散過程—確率微分方程式

[拡散過程] 確率過程 $\mathbf{X} = (X(t); t \geq 0)$ が直線上を運動する拡散過程であるならば,二つの関数 $b, \sigma : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ とブラウン運動 $\mathbf{B} = (B(t); t \geq 0)$ が存在して, $\mathbf{X}$ はつぎの方程式を満たす:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB(s). \tag{4.1}$$

右辺の第二項はブラウン運動に関する確率積分(伊藤積分)である([11]).

方程式(2.1)は,(4.1)の特別な例として,つぎのように書き変えられる:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (-\beta X(s))ds + \int_0^t \sigma dB(s). \tag{4.2}$$

第三章で(3.4)が第二種揺動散逸定理と名付けられたのは,(4.2)の右辺の第一項が散逸項(決定的な項),第二項が揺動項(ランダムな項)を表すからである.

それ故,一般に(4.1)の右辺の第一項を散逸項,第二項を散逸項と名付ける:

$$D(t) \equiv \int_0^t b(X(s))ds --- \quad \text{散逸項} \tag{4.3}$$

$$F(t) \equiv \int_0^t \sigma(X(s))dB(s) --- \text{揺動項}. \tag{4.4}$$

方程式(4.2)は線形であるが,方程式(4.1)は一般には非線形である.如何なるかたちの揺動散逸定理が方程式(4.1)になりたつのか?これが久保の問題で9年前にひとつの解答をあたえた([26]).

あとの10章で確率衝突モデルに対する揺動散逸定理を述べる.そこでは,(4.4)で与えられた揺動項 $F(*)$ がマーチンゲールであり,その確率的性質を特徴付ける二次変分 $\langle F \rangle_*$:

$$\langle F \rangle_t = \int_0^t \sigma(X(s))^2 ds \tag{4.5}$$

が大切な役割を果たす.

§5. 定性的性質からモデル:定常流—確率微分積分方程式

[定常過程] $\mathbf{X}=(X(t);t\in\mathbf{R})$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上で定義され，共分散関数 $R:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ をもつ弱定常過程とする.

$$E(X(t)X(s))=R(t-s). \tag{5.1}$$

ヒルベルト空間 $L^2(\Omega,\mathcal{B},P)$ 内の閉部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ を

$$\mathcal{H}_{\mathbf{X}}\equiv\{X(t);t\in\mathbf{R}\}\text{ の張る閉部分空間} \tag{5.2}$$

で定義する. この空間はつぎの内積

$$(Y_1,Y_2)\equiv E(Y_1\bar{Y}_2) \tag{5.3}$$

をもつヒルベルト空間となる. そのとき, $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ 上で作用するユニタリー群 $(U(t);t\in\mathbf{R})$:

$$U(t)(X(s))=X(s+t) \tag{5.4}$$

が定まる. 各 $t\in\mathbf{R}$ に対して, 確率変数 $X(t)$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ の中のベクトル $A(t)$

$$A(t)\equiv X(t) \tag{5.5}$$

と見なすことによって, $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ の中の流れ $\mathbf{A}=(A(t);t\in\mathbf{R})$ ができる.

性質 (5.1) より, これを定常流とよぶ.

[定常流] 一般に, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中の流れ $\mathbf{A}=(A(t);t\in\mathbf{R})$ でつぎの性質

$$(A(t),A(s))=(A(t-s),A(0)) \tag{5.6}$$

を満たすものを定常流と名付ける. ここで, $(,\star)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積である.

(5.2) と同様に, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の閉部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ を

$$\mathcal{H}_{\mathbf{A}}\equiv\{A(t);t\in\mathbf{R}\}\text{ の張る閉部分空間} \tag{5.7}$$

を考える. (5.4)と同様に, $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$上で作用するユニタリー群 $(U(t);t\in\mathbf{R})$:

$$U(t)(A(s))=A(s+t) \tag{5.8}$$

が定まる.一般論より, ヒルベルト空間$\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$に作用する自己共役作用素Lで

$$U(t)=e^{itL} \tag{5.9}$$

を満たす線形作用素が存在する.これを定常流に付随するハミルトニアンと呼ぶ.

[森ノイズ] つぎの条件

$$A(0)\in\mathcal{D}(L) \tag{5.10}$$

のもとで, 森肇氏の理論([20])が展開された.この条件は定常流$\mathbf{A}$がヒルベルト空間$\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$内の可微分な流れであることを意味する.すなわち, 流れ$\mathbf{A}$の速度流とも言うべき$\dot{\mathbf{A}}=(\dot{A}(t);t\in\mathbf{R})$

$$\dot{A}(t)\equiv\frac{dA(t)}{dt} \tag{5.11}$$

が定義される.

ヒルベルト空間$\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$内の閉部分空間$\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{H}_1\equiv\mathcal{H}_{\mathbf{A}}\ominus[A(0)] \tag{5.12}$$

とそこに作用する自己共役作用素L_1

$$L_1\equiv(I-P_0)L \tag{5.13}$$

を定める.ここで, 作用素P_0は初期ベクトル$A(0)$で張られる一次元の空間$[A(0)]$への直交射影作用素である.

ヒルベルト空間$\mathcal{H}_1$内の定常流として, 森ノイズ$\mathbf{I}_M=(I_M(t);t\in\mathbf{R})$が

$$I_M(t)\equiv e^{itL_1}(I-P_0)\dot{A}(0) \tag{5.14}$$

で定義される.

森の振動数 ω_M と森の核関数 $\varphi_M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ を

$$\omega_M \equiv i^{-1}(\dot{A}(0), A(0))(A(0), A(0))^{-1} \tag{5.15}$$

$$\varphi_M(t) \equiv (I_M(t), I_M(s)) \cdot (A(0), A(0))^{-1} \tag{5.16}$$

で定める.

森の理論の基本は共分散関数 R のラプラス-フーリエ変換として定義される**複素移動関数** $[R] : \mathbf{C}^+ \longrightarrow \mathbf{C}$

$$[R](\zeta) \equiv \int_0^\infty e^{i\zeta t} R(t) dt \tag{5.17}$$

を解析的に表現したことである. それはつぎで与えられる:

$$[R](\zeta) = \frac{R(0)}{-i\omega_M - i\zeta + \int_0^\infty e^{i\zeta t} \varphi_M(t) dt}. \tag{5.18}$$

これと同値な表現として, 定常流 $\mathbf{A}$ の時間発展を記述する森の方程式が得られる:

$$\dot{A}(t) = i\omega_M A(t) - \int_0^t \varphi_M(t-s) A(s) ds + I_M(t) \quad (t \in \mathbf{R}). \tag{5.19}$$

[久保ノイズ]　条件 (5.10) が成り立たない場合

$$A(0) \notin \mathcal{D}(L) \tag{5.20}$$

に対しても, 定常流 $\mathbf{A}$ の時間発展を記述する方程式をもとめるのが KMO-ランジュヴァン方程式論である ([21]—[31]). そこで, 揺動力として久保ノイズが導入された.

そのために, 初期ベクトル $A(0)$ を $\mathcal{D}(L)$ に属する元 A_n の列 $(n \in \mathbf{N})$

$$A_n \equiv n \int_0^\infty e^{-nt} U(t) A(0) dt \tag{5.21}$$

で近似する:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A(0) \qquad (\text{in } \mathcal{H}_{\mathbf{A}}). \tag{5.22}$$

複素移動関数 $[R]$ は初期ベクトル A_n に関する複素移動関数 $[R_n]$ の列で近似される:

$$\begin{aligned} [R](\zeta) &= \lim_{n\to\infty}[R_n](\zeta) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{i\zeta t}(U(t)A_n, A_n)dt \end{aligned} \tag{5.23}$$

従って, 各 n に対して, 森の理論の (5.18) を用いて

$$[R_n](\zeta) = \frac{R_n(0)}{-i\omega_M^{(n)} - i\zeta + \int_0^\infty e^{i\zeta t}\varphi_M^{(n)}(t)dt} \tag{5.24}$$

となる. 数列 $\omega_M^{(n)}$ は収束しないので, 適当な renormalization をすることによって, 複素移動関数 $[R]$ に関して次の表現が得られる:

$$[R](\zeta) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\beta - i\zeta - i\zeta K(\zeta)}. \tag{5.25}$$

ここで

$$\alpha > 0, \beta > 0 \tag{5.26}$$

$$K(\zeta) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(\lambda - \zeta - i\epsilon)(\lambda - i\epsilon)}\kappa(d\lambda)\cdot(\sqrt{2\pi}\alpha)^{-1} \tag{5.27}$$

(5.28) $\kappa(d\lambda)$ は直線上の Borel 測度で $\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+\lambda^2}\kappa(d\lambda) < \infty$.

この準備の下で, 久保ノイズが導入される. ユニタリー群 $(U(t); t\in\mathbf{R})$ に関するスペクトル分解

$$U(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-it\xi}dE(\xi) \tag{5.29}$$

を用いて

$$A(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-it\xi}dE(\xi)A(0) \tag{5.30}$$

を得る．シュワルツの急減少関数の空間$\mathcal{S}(\mathbf{R})$の元φを用いて定常流$\mathbf{A}$を正則化して，超定常流$(A(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$を定義する：

$$A(\varphi)\equiv\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)A(t)dt. \tag{5.31}$$

正数$\eta>0$に対して，コーシー核P_ηを

$$P_\eta(x)=\frac{\eta}{\pi(\eta^2+x^2)} \tag{5.32}$$

として，超定常流$(I_\eta(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$を定義する：

$$I_\eta(\varphi)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}P_\eta*(\hat{\varphi}(\cdot)[R](\cdot+i\eta)^{-1})(\xi)dE(\xi)A(0). \tag{5.33}$$

適当な条件の下で，久保ノイズ$\mathbf{I}_K=(I_K(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$が上の超定常流の極限として定まる：

$$I_K(\varphi)=\lim_{\eta\downarrow 0}I_\eta(\varphi). \tag{5.34}$$

久保ノイズの共分散は

$$(I_K(\varphi),I_K(\psi))=(\frac{\sqrt{2\pi}}{R(0)})^2\int_{\mathbf{R}}\hat{\varphi}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(\xi)\kappa(d\xi) \tag{5.35}$$

で与えらる．即ち，久保ノイズのスペクトル測度は$(\frac{\sqrt{2\pi}}{R(0)})^2\kappa(d\xi)$である．

この久保ノイズを揺動力とすることによって，複素移動関数$[R]$の表現(5.25)の同値な表現として，定常流$\mathbf{A}$の時間発展を与える方程式が，超定常流$(A(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$の言葉で，導かれる：

$$\dot{A}(\varphi)=-\beta A(\varphi)-\lim_{\epsilon\downarrow 0}(\gamma_\epsilon*\dot{A})(\varphi)+\alpha I_K(\varphi). \tag{5.36}$$

ここで

$$K_\epsilon(\zeta)\equiv\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{(\lambda-\zeta-i\epsilon)(\lambda-i\epsilon)}\kappa(d\lambda). \tag{5.37}$$

§6. Alder-Wainwright 効果

1960年代末, AlderとWainwrightは,剛体球と剛体円板からなる流体モデルのコンピューターシュミレーションによる実験によって,花粉粒子とみなす剛体球の速度の相関関数Rが,(2.3)の如く指数的に減衰しないで,

$$R(t) \asymp \frac{1}{t^{3/2}} \quad (t \to \infty) \tag{6.1}$$

という長時間挙動を示すことを発見した([1],[2]). このことは, EinsteinとLangevinのブラウン運動の理論に疑義がかかり,確率論的には,実際のブラウン運動はマルコフ性を持たない事になる.

理論に疑義がかかればそれを修正する物理学では, EinsteinとLangevinより以前の19世紀末のStokes[51]とBoussinesqu[3]の研究を基礎にして,粘性η,密度ρの液体中を,半径r,質量mの剛体球が,時刻tで揺動力$W(t)$を受け,速度が$X(t)$で動くモデルとして,つぎの方程式が考えられた:

$$m^* \dot{X}(t) = -6\pi r\eta X(t) - 6\pi r^2 (\frac{\rho\eta}{\pi})^{1/2} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \dot{X}(s)ds + W(t). \tag{6.2}$$

ここでm^*は有効質量である:

$$m^* = m + \frac{2}{3}\pi r^3 \rho. \tag{6.3}$$

方程式(6.2)の右辺に於ける積分項は,剛体球によってはねのけられた液体が長い時間をかけて剛体球に及ぼす力である.この力は, Einsteinの研究では無視されたが,約65年後に,コンピュウターの発達によって復活したのであった.方程式(6.2)を**Stokes-Boussinesq-ランジュヴァン方程式**と呼ぶ.

(6.1)は,久保の線形応答理論を適用して,物理理論としても物理実験としても検証された([53],[14],[49]).数学的には,揺動力$W(*)$として久保ノイズが使われ,方程式(6.2)の解$X_K(*)$は

定常性を満たし，その相関関数 R_K はつぎのように求められた ([14],[28]):

$$R_K(t) = \int_0^\infty e^{-|t|\lambda}\sigma_K(d\lambda). \tag{6.4}$$

ここで，σ_K はつぎで与えられる $[0,\infty)$ 上の Borel 測度である:

$$\sigma_K(d\lambda) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\alpha_{SB}e_{SB}\frac{\lambda^{1/2}}{(\beta_{SB}-\lambda)^2+e_{SB}^2\lambda}d\lambda. \tag{6.5}$$

そこで，定数 $\alpha_{SB},\beta_{SB},e_{SB}$ は正数である:

$$\alpha_{SB} = \frac{1}{m^*} \tag{6.6}$$

$$\beta_{SB} = \frac{6\pi r\eta}{m^*} \tag{6.7}$$

$$e_{SB} = \frac{6\pi r^2(\rho\eta)^{1/2}}{m}. \tag{6.8}$$

揺動力 $W(*)$ としてホワイトノイズ $\dot{B}(*)$ を採用したときも，方程式 (6.2) の解 $X_W(*)$ は定常性を満たし，その相関関数 R_W は

$$R_W(t) = \int_0^\infty e^{-|t|\lambda}\sigma_W(d\lambda). \tag{6.9}$$

となる ([28])．そこで，σ_W はつぎで与えられる $[0,\infty)$ 上の Borel 測度である:

$$\sigma_W(d\lambda) = \frac{\alpha_{SB}^2}{\pi}\frac{e_{SB}}{\beta_{SB}+\lambda+e_{SB}\lambda^{1/2}}\frac{\lambda^{1/2}}{(\beta_{SB}-\lambda)^2+e_{SB}^2\lambda}d\lambda. \tag{6.10}$$

どちらの定常過程 $X_W(*), X_W(*)$ も (6.1) を満たす．一般の定常過程にたいして，その相関関数の遠方での挙動が多項式的に減衰することを **Alder-Wainwright** 効果とよぶ．

揺動力としていろいろ考える立場は，§4 でのべた「定性的性質からモデルへ」の哲学に反する．定常過程 $X_W(*), X_W(*)$ はマルコフ性を持たないのなら，如何なる性質をもつのであろうか．その性質は方程式 (6.2) を導き出すのであろうか．

§7. 鏡映正値性(連続系)

定常過程 $\mathbf{X}=(X(t);t\in\mathbf{R})$ が鏡映正値性をもつとは,その相関関数 R が $[0,\infty)$ 上の有界の Borel 測度 $\sigma(d\lambda)$ によって

$$R(t)=\int_0^\infty e^{-|t|\lambda}\sigma(d\lambda) \tag{7.1}$$

と表現されるときをいう. (6.4),(6.9) より, §6 の定常過程 $X_K(*), X_W(*)$ は鏡映正値性をもつ.

一般に鏡映正値性をもつ定常過程 $\mathbf{X}$ は,それに付随するホワイトノイズ $\dot{B}(*)$ を久保ノイズ $I_K(*)$ を揺動力とすることによって,つぎの 2 種類の方程式によって支配される:

$$\dot{X}(t)=-\beta_1X(t)+(\gamma_1*\dot{X})(t)+\alpha_1\dot{B}(t) \tag{7.2}$$

$$\dot{X}(t)=-\beta_2X(t)+(\gamma_2*\dot{X})(t)+\alpha_2I_K(t). \tag{7.3}$$

ここで $\alpha_j\ (j=1,2)$ は正数, $\gamma_j\ (j=1,2)$ は $[0,\infty)$ 上の Borel 測度 $\rho_j(d\lambda)\ (j=1,2)$ によって

$$\gamma_j(d\lambda)=\begin{cases}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\rho_j(d\lambda) & (t>0)\\ 0 & (t\leq 0)\end{cases} \tag{7.4}$$

として与えられる. 方程式 (7.2), (7.3) をそれぞれ第 1 種, 第 2 種 KMO-ランジュヴァン方程式という.

Alder-Wainwright 効果に関しては, 相関関数 R の減衰は方程式 (7.1),(7.2) に於ける遅れの項の関数 γ_j の減衰によって支配されることが分かる ([9],[10],[32],[37]). 具体的にはつぎの 3 つのことは互いに同値である:

$$\begin{array}{llcll}(i) & R(t) & \sim & t^{-(1+p)}L(t) & (t\to\infty)\\ (ii) & \gamma_1(t) & \sim & \alpha_1^{-2}\beta_1^3pt^{-p}L(t) & (t\to\infty)\\ (iii) & \gamma_2(t) & \sim & \sqrt{2\pi}^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_2^2pt^{-p}L(t) & (t\to\infty).\end{array}$$

ここで, p は正数, $L(*)$ は slowly varying と呼ばれる関数である:

$$\forall\lambda>0,\ \frac{L(\lambda t)}{L(t)}\longrightarrow 1\quad(t\to\infty).$$

Einsteinの関係式に関しては,第1種KMO-ランジュヴァン方程式に対しては,(3.7)と較べて,「ズレ」が生じるが,第2種KMO-ランジュヴァン方程式に対しては成立する.

第1種,第2種KMO-ランジュヴァン方程式に対する**揺動散逸定理**が得られる.詳しくは文献を見てください([21]—[31],[37]).

§8. 鏡映正値性(離散系)

今まで,確率過程の時間域として実数の全体**R**をとるという連続系を扱かってきたが,整数の全体**Z**をとる離散系の結果を紹介する.揺動散逸定理が如何なる形で成り立つかを調べることが研究のはじめの動機であった.そこでつかんだことはあとで述べるように,哲学「データからモデルへ」を

(8.1)
「データからモデルへ」=
「データから定性的性質」+「定性的性質からモデルへ」

として実現するさいに,揺動散逸定理が大切な役割を果たすことであった.

定常過程 $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbf{Z})$ が鏡映正値性をもつとは,その相関関数 R が [-1, 1] 上の有界の Borel 測度 $\sigma(d\lambda)$ によって

$$R(n) = \int_{-1}^{1} \lambda^{|n|} \sigma(d\lambda) \tag{8.2}$$

と表現されるときをいう.

鏡映正値性をもつ定常過程 $\mathbf{X}$ は,それに付随するホワイトノイズ $\xi(*)$ を久保ノイズ $I_K(*)$ を揺動力とすることによっ

て,つぎの2種類の方程式によって支配される:

$$\Delta X(n) = -\beta_{m,1}\frac{(X(n)+X(n-1))}{2} - \sum_{m=-\infty}^{n-1}\gamma_{1,0}(n-m)\Delta X(m) + \alpha_{m,1}\xi(n), \tag{8.3}$$

$$\Delta X(n) = -\beta_{m,2}\frac{(X(n)+X(n-1))}{2} - \sum_{m=-\infty}^{n-1}\gamma_{2,0}(n-m)\Delta X(m) + \alpha_{m,2}I_K(n). \tag{8.4}$$

ここで, ΔX は

$$\Delta X(n) = X(n) - X(n-1) \tag{8.5}$$

を表わし, $\alpha_{m,j}$ $(j=1,2)$ は正数, $\gamma_{j,0}$ $(j=1,2)$ は [-1,1] 上の Borel 測度 $\rho_j(d\lambda)$ $(j=1,2)$ によって

$$\gamma_{j,0}(n) = \begin{cases} 0 & (n=-1,-2,\cdots) \\ \rho_j([-1,1]) & (n=0) \\ \int_{-1}^{1}(t^n+t^{n-1})\rho_j(dt) & (n=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{8.6}$$

と表現される.

方程式 (8.3), (8.4) をそれぞれ修正第1種, 修正第2種 KMO-ランジュヴァン方程式という. これらの方程式に対して, **Alder-Wainwright** 効果, **Einstein** の関係式, 揺動散逸定理が得られる. 詳しくは文献を見てください ([33]—[35],[9],[10]).

§9. KM$_2$O-ランジュヴァン方程式論

今までの確率過程は鏡映正値性を満たす弱定常過程であったが, 実際のデータへの解析に応用する為には, はじめから鏡映正値性を仮定することはできない. そこで, d-次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ を状態空間とし, 弱定常性のみを満たす確率過程 $\mathbf{X}=(X(n); n\in\mathbf{Z})$ にたいして構築したのが KM$_2$O-

ランジュヴァン方程式論である.それはつぎの6個の部分

$$
\text{KM}_2\text{O-ランジュヴァン方程式論}\begin{cases}(1)\ \text{定常解析}\\(2)\ \text{予測解析}\\(3)\ \text{エントロピー解析}\\(4)\ \text{因果解析}\\(5)\ \text{時系列解析}\\(6)\ \text{現実系・複雑系への応用}\end{cases}
$$

から成り立つ.$\mathbf{X}$の時間発展を支配する方程式は,弱定常性のみから

$$
X(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n,k)X(k) + \nu_+(n) \quad (n \geq 1) \tag{9.1}
$$

$$
X(-n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n,k)X(-k) + \nu_-(-n) \quad (n \geq 1) \tag{9.2}
$$

として記述される.ここで,$\gamma_\pm(n,k)$は$d \times d$の行列である.この方程式は離散系に対してあるが,連続系に対しては三好氏の研究がある([18],[19]).

この理論をささえるのは揺動散逸定理であり,その奥にある精神を昇華させたのが**揺動散逸原理**という哲学である.これをデータ解析に応用し,「データからモデルへ」が可能になる.データの奥に潜むダイナミックスを探し,将来の予測を行うとともに,2種類のデータの間の因果関係の有無を調べることができる.詳しくは文献を見てください([36]—[46]).

データ解析で扱う複雑系として,つぎのものを解析している.

1 気象データ: 黒点,気温,雨量,宇宙からのパルサー
2 経済データ: 株,卸売り物価指数,マネーサプライ
3 山猫(リンクス)
4 医学データ: 脳波,DNAの塩基配列
5 カオティックなデータ

§10. 可積分系の確率モデル

生物の生態系のモデルとしてよく調べられているのはつぎのロトカ-ヴォルテラモデルである.

$$
(10.1)\qquad \begin{cases} \dot{P}_1(t) &= \lambda P_1(t)(-P_2(t)+P_3(t)) \\ \dot{P}_2(t) &= \lambda P_2(t)(-P_3(t)+P_1(t)) \\ \dot{P}_3(t) &= \lambda P_3(t)(-P_1(t)+P_2(t)). \end{cases}
$$

ここで, λ は正数である.

この微分方程式は可積分であり,つぎのふたつの保存量をもつ:

$$
(10.2)\qquad \begin{cases} P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)=C_0 \\ P_1(t)P_2(t)P_3(t)=C_1. \end{cases}
$$

これに対する確率モデルとして,伊藤栄明氏(統数研)は確率衝突モデルとしのつぎのジャンケンポンモデルを調べてきた([12]):

(10.3)

$$
\begin{cases} X_1^{(M)}(t)=X_1^{(M)}(0)+N_{12}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_1^{(M)}(s)X_2^{(M)}(s)ds)-N_{31}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_3^{(M)}(s)X_1^{(M)}(s)ds) \\ X_2^{(M)}(t)=X_2^{(M)}(0)+N_{23}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_2^{(M)}(s)X_3^{(M)}(s)ds)-N_{12}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_1^{(M)}(s)X_2^{(M)}(s)ds) \\ X_3^{(M)}(t)=X_3^{(M)}(0)+N_{31}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_3^{(M)}(s)X_1^{(M)}(s)ds)-N_{23}(\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_2^{(M)}(s)X_3^{(M)}(s)ds). \end{cases}
$$

ここで, $N_{12}(*), N_{23}(*), N_{31}(*)$ は互いに独立なポアソン過程である.ポアソン過程を特徴付ける定性的性質はつぎである:

(P-1) 独立増分

(P-2) 軌跡は高さ1の飛躍でのみ増加する.

$X_1^{(M)}(t), X_2^{(M)}(t), X_3^{(M)}(t)$ は時刻 t での種1(グー),種2(チョキ),種3(パー)の個体数を意味し,初期条件として,系の総数は一定 $(=M)$ であるとする:

$$
(10.4)\qquad X_1^{(M)}(0)+X_2^{(M)}(0)+X_3^{(M)}(0)=M.
$$

揺動散逸定理の観点から調べてみよう([47],[48]).詳しくは文献をみてください.方程式(10.1)と(10.4)との関係は,つぎの大数の法則で与えられる:

大数の法則 もし

$$\lim_{M\to\infty}\frac{X_j^{(M)}(0)}{M}=P_j(0)\quad(\text{確率収束}, j=1,2,3)$$

ならば，任意の正数 $t>0$ に対して

$$\lim_{M\to\infty}\frac{X_j^{(M)}(t)}{M}=P_j(t)\quad(\text{確率収束}, j=1,2,3).$$

がなりたつ．

上の収束の速さを調べるために

$$Y_j^{(M)}(t)\equiv\sqrt{M}\left(\frac{X_j^{(M)}(t)}{M}-P_j(t)\right) \tag{10.5}$$

とおく．このとき，つぎの中心極限定理が成り立つ．

中心極限定理 もし

$$\lim_{M\to\infty}Y_j^{(M)}(0)=Y_j\quad(\text{法則収束}, j=1,2,3)$$

ならば，任意の正数 $t>0$ に対して

$$\lim_{M\to\infty}Y_j^{(M)}(t)=Y_j(t)\quad(\text{法則収束}, j=1,2,3).$$

がなりたつ．さらに，確率過程 $\mathbf{Y}=(Y(t);t\geq 0)$ はつぎの確率微分方程式を満たす正規拡散過程である：

$$\begin{cases} Y_1(t) &= Y_1(0)+\lambda\int_0^t(Y_1(s)(P_2(s)-P_3(s))+P_1(s)(Y_2(s)-Y_3(s))ds+\\ &\qquad +\int_0^t\sqrt{\lambda P_1(s)(P_2(s)+P_3(s))}dB_{12}(s)\\ Y_2(t) &= Y_2(0)+\lambda\int_0^t(Y_2(s)(P_3(s)-P_1(s))+P_2(s)(Y_3(s)-Y_1(s))ds+\\ &\qquad +\int_0^t\sqrt{\lambda P_2(s)(P_3(s)+P_1(s))}dB_{23}(s)\\ Y_3(t) &= Y_3(0)+\lambda\int_0^t(Y_3(s)(P_1(s)-P_2(s))+P_3(s)(Y_1(s)-Y_2(s))ds+\\ &\qquad +\int_0^t\sqrt{\lambda P_3(s)(P_1(s)+P_2(s))}dB_{31}(s). \end{cases} \tag{10.6}$$

ここで，$B_{12}(*), B_{23}(*), B_{31}(*)$ は互いに独立なブラウン運動である．

これらのことを導く確率構造は揺動散逸定理がモデル (10.3) に対して成り立っていることである．それを説明しよう．ランダム時間 $T_{12}^{(M)}(t), T_{23}^{(M)}(t), T_{31}^{(M)}(t)$ を

$$\begin{cases} T_{12}^{(M)}(t)\equiv\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_1^{(M)}(s)X_2^{(M)}(s)ds\\ T_{23}^{(M)}(t)\equiv\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_2^{(M)}(s)X_3^{(M)}(s)ds\\ T_{31}^{(M)}(t)\equiv\frac{\lambda}{M}\int_0^t X_3^{(M)}(s)X_1^{(M)}(s)ds \end{cases} \tag{10.7}$$

とおく.これらをつかって,モデル(10.3)を書き直す:

$$
(10.8)\qquad \begin{cases} X_1^{(M)}(t) = X_1^{(M)}(0) + D_1^{(M)}(t) + F_1^{(M)}(t) \\ X_2^{(M)}(t) = X_2^{(M)}(0) + D_2^{(M)}(t) + F_2^{(M)}(t) \\ X_3^{(M)}(t) = X_3^{(M)}(0) + D_3^{(M)}(t) + F_3^{(M)}(t). \end{cases}
$$

ここで, $D_j(*)$ $(1 \le j \le 3)$ は散逸項で

$$
(10.9)\qquad \begin{cases} D_1^{(M)}(t) \equiv T_{12}^{(M)}(t) - T_{31}^{(M)}(t) \\ D_2^{(M)}(t) \equiv T_{23}^{(M)}(t) - T_{12}^{(M)}(t) \\ D_3^{(M)}(t) \equiv T_{31}^{(M)}(t) - T_{23}^{(M)}(t) \end{cases}
$$

で表現され, $F_j(*)$ $(1 \le j \le 3)$ は揺動項で

$$
(10.10)\qquad \begin{cases} F_1^{(M)}(t) \equiv \{N_{12}(T_{12}^{(M)}(t)) - T_{12}^{(M)}(t)\} - \{N_{31}(T_{31}^{(M)}(t)) - T_{31}^{(M)}(t)\} \\ F_2^{(M)}(t) \equiv \{N_{23}(T_{23}^{(M)}(t)) - T_{23}^{(M)}(t)\} - \{N_{12}(T_{12}^{(M)}(t)) - T_{12}^{(M)}(t)\} \\ F_3^{(M)}(t) \equiv \{N_{31}(T_{31}^{(M)}(t)) - T_{31}^{(M)}(t)\} - \{N_{23}(T_{23}^{(M)}(t)) - T_{23}^{(M)}(t)\} \end{cases}
$$

で表現される.

表現(10.8)はDoob-Meyer分解にあたる.マーチンゲール $F_j^{(M)}(*)$ の二次変分 $\langle F_j^{(M)} \rangle_*$ は

$$
(10.11)\qquad \begin{cases} \langle F_1^{(M)} \rangle_t = T_{12}^{(M)}(t) + T_{31}^{(M)}(t) \\ \langle F_2^{(M)} \rangle_t = T_{23}^{(M)}(t) + T_{12}^{(M)}(t) \\ \langle F_3^{(M)} \rangle_t = T_{31}^{(M)}(t) + T_{23}^{(M)}(t) \end{cases}
$$

となり,相互の二次変分は

$$
(10.12)\qquad \begin{cases} \langle F_1^{(M)}, F_2^{(M)} \rangle_t = T_{12}^{(M)}(t) \\ \langle F_2^{(M)}, F_3^{(M)} \rangle_t = T_{23}^{(M)}(t) \\ \langle F_3^{(M)}, F_1^{(M)} \rangle_t = T_{31}^{(M)}(t) \end{cases}
$$

となる.それは,ポアソン過程 $N_{12}(*), N_{23}(*), N_{31}(*)$ に関するDoob-Meyer分解

$$
(10.12)\qquad \begin{cases} N_{12}(t) = (N_{12}(t) - t) + t \equiv \tilde{N}_{12}(t) + t \\ N_{23}(t) = (N_{23}(t) - t) + t \equiv \tilde{N}_{23}(t) + t \\ N_{31}(t) = (N_{31}(t) - t) + t \equiv \tilde{N}_{31}(t) + t \end{cases}
$$

よりしたがう

$$
(10.13) \qquad \begin{cases} \langle \tilde{N}_{12} \rangle_t = t \\ \langle \tilde{N}_{23} \rangle_t = t \\ \langle \tilde{N}_{31} \rangle_t = t \\ \langle \tilde{N}_{12}, \tilde{N}_{23} \rangle_t = 0 \\ \langle \tilde{N}_{23}, \tilde{N}_{31} \rangle_t = 0 \\ \langle \tilde{N}_{31}, \tilde{N}_{12} \rangle_t = 0 \end{cases}
$$

と(10.7)に於けるランダム時間 $T_j^{(M)}(t)$ が停止時間であることを用いて計算される.

従って,モデル(10.4)に対してつぎの揺動散逸定理が成り立つ:

揺動散逸定理

$$
(10.14) \qquad \begin{pmatrix} D_1^{(M)}(t) \\ D_2^{(M)}(t) \\ D_3^{(M)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle F_1^{(M)}, F_2^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_2^{(M)}, F_3^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_3^{(M)}, F_1^{(M)} \rangle_t \end{pmatrix}.
$$

$$
(10.15) \qquad \begin{pmatrix} \langle F_1^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_2^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_3^{(M)} \rangle_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle F_1^{(M)}, F_2^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_2^{(M)}, F_3^{(M)} \rangle_t \\ \langle F_3^{(M)}, F_1^{(M)} \rangle_t \end{pmatrix}.
$$

(10.14),(10.15)のような揺動散逸定理はモデル(10.6)に対しては成り立たない((4.2)に対しても成り立たない).

別の極限定理から非正規拡散過程を導くために,つぎのスケーリングを施す:

$$
(10.16) \qquad Z_j^{(M)}(t) \equiv \frac{X_j^{(M)}(Mt)}{M}.
$$

残念ながら,これは収束しない. かかるスケーリング変換をとうして,非正規拡散過程を導くためには,もとのモデル(10.4)を修正する必要がある.この修正したモデルに対しては,(10.16)のスケーリング変換をとうして非正規拡散過程を導くことができ,それを記述する確率微分方程

式に対して,(10.14),(10.15)のような揺動散逸定理が成り立つ. さらに,この非正規拡散過程の生成作用素に関して,「べき零」という性質が成り立つ.

三つの概念可積分性,揺動散逸定理,べき零は互いに結びつきそうである.

文献

[1]. Alder, B.J. and T.E. Wainwright, *Velocity autocorrelations for hard spheres*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 988–990.

[2]. ———, *Decay of the velocity autocorrelation function*, Phys. Rev. Lett. **A.1** (1970), 18–21.

[3]. Boussinesq, J., *Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide*, C.R. Acad. Sci. Paris **100** (1885), 935–937.

[4]. Brown, R., Philos. Mag., Ann. of Philos. **4** (1828), 161–178.

[5]. Doob, J.L., *The Brownian movement and stochstic equatons*, Ann. Math. **43** (1942), 351–369.

[6]. ———, *The elementary Gaussian processes*, Ann. Math. Stat. **15** (1944), 229–282.

[7]. Einstein, A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme ge- forderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* , Drudes Ann. **17** (1905), 549–560.

[8]. Hida, T., *Analysis of Brownian functionals, Carleton Mathematical Lecture Notes, no. 13, 1975.*.

[9]. Inoue, A., *The Alder-Wainwright effect for stationary processes with reflection positivity (I)*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 515–526.

[10]. ———, *The Alder-Wainwright effect for stationary processes with reflection positivity (II)*, Osaka J. Math. **28** (1991), 537–561.

[11]. Ito, K., *On a formula concerning stochastic differentials*, Nagoya Math. J. **3** (1951), 55–65.

[12]. Itoh, Y., *Random collision models in oriented graphs*, J. Appl. Prob. **516** (1979), 36–44.

[13]. Kubo, R., *Statistical mechanical theory of irreversible processes I, general theory and simple applicatons to magnetic and conduction problems*, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957), 570–586.

[14]. ———,非可逆過程と確率過程,確率過程論と開放系の統計力学(数理解析研究所講究録) **367** (1979), 50–93.

[15]. Langevin, P., *Sur la théorie du mouvement brownien*, C.R.Acad.Sci.Paris **146** (1908), 530–533.

[16]. Lévy, P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier Villars, 1937.

[17]. Malliavin P., *Stochastic calculus of variation and hypoellitic operators, Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto,1976, ed. by K.Ito, Kinokuniya, 1978.*.

[18]. Miyoshi, T., *On (l,m)-string and$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$-Langevin equation associated with a stationary Gaussian process*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA. **30** (1983), 139-190.

[19]. ———, *On an $\mathbb{R}^d$-valued stationary Gaussian process associated with (k,l,m)-string and $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$-Langevin equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA. **31** (1984), 154-194.

[20]. Mori, H., *Transport, collective motion and Brownian motion*, Progr. Theor. Phys. **33** (1965), 423–455.

[21]. Okabe, Y., *On a stationary Gaussian process with T-positivity and its associated Langevin equation and S-matrix*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **26** (1979), 115–165.

[22]. ———, *On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with T-positivity and the fluctuation-dissipation theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **28** (1981), 169–213.

[23]. ———, Langevin方程式について,数学 **33** (1981), 306–324.

[24]. ———, *On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with finite multiple Markovian property and the fluctuation-dissipation theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **28** (1982), 793–804.

[25]. ———, *On a wave equation associated with prediction errors for a stationary Gaussian process*, Lecture Notes in Control and Information Sci. **49** (1983), 215–226.

[26]. ———, *A generalized fluctuation-dissipation theorem for one-dimensional difusionprocess*, Commun. Math. Phys. **98** (1985), 449–468.

[27]. ———, *On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian process with T-positivity*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **33** (1986), 1–56.

[28]. ———, *On the theory of Brownian motion with the Alder-Wainwright effect*, J. Stat. Phys. **45** (1986), 953–981.

[29]. ———, *KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (I)*, Hokkaido Math. J. **15** (1986), 163–216.

[30]. ———, *KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (II)*, Hokkaido Math. J. **15** (1986), 317–355.

[31]. ———, *Stokes-Boussinesq-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem*, Probability Theory and Mathematical Statistics (ed. by Prohorov et al.), VNU Science Press **2** (1986), 431–436.

[32]. ———, *On long time tails of correlation functions for KMO-Langevin equations*, Proceedings of the Fourth Japan-USSR Symposium on Probability and Mathematical Statistics, Kyoto, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Tokyo **1299** (1986), 391–397.

[33]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (I)*, Hokkaido Math. J. **16** (1987), 315–341.

[34]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (II)*, Hokkaido Math. J. **17** (1988), 1–44.

[35]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (III)*, Hokkaido Math. J. **18** (1989), 149–174.

[36]. ———, *On stochastic difference equations for the multi-dimensional weak-ly stationary time series*, Prospect of Algebraic Analysis(ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic press, Tokyo, 1988, pp. 601–645.

[37]. ———, Langevin方程式と因果解析, 数学 **43** (1991), 322–346.

[38]. ———, 自然科学と定常過程, 数理科学 **340** (1991), 21–28.

[39]. ———, 確率過程の特徴付け定性的性質からモデルへ, 数理科学 **347** (1992), 11–17.

[40]. ———, *Application of the theory of KM_2O-Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 277–294.

[41]. ———, *A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O-Langevin equations*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 199–209.

[42]. Okabe, Y. and Y. Nakano, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (I):Stationary analysis*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 45-90.

[43]. Okabe, Y. and A. Inoue, *On the expontial decay of the correlation functions for KMO-Langevin equations*, Japanese. J. Math. **18** (1992), 13–24.

[44]. Okabe, Y. and A. Inoue, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (II):Causal analysis*, to appear in Nagoya Math. J..

[45]. Okabe, Y. and T. Ootsuka, *Application of the theory of* KM_2O*-Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[46]. ———, The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (III): Prediction analysis, in preparation.

[47]. Okabe, Y., H. Mano and Y. Itoh, *Random collision model for interacting populations of two species and the fluctuation-dissipatiom theorem—the law of large numbers and the central limit theorem*, to be submitted in Hokkaido Math. J..

[48]. ———, *Paper-scissors-stone model for interacting population and its limit theorem*, Research Memorandum, No. 484, 1993, 1-13, The Institute of Statistical Mathematics.

[49]. Oobayashi, K., Kohno, T. and H. Utiyama, *Photon correlation spectroscopy of the non-Markovian Brownian motion of spherical particles*, Phys. Rev. A **27** (1983), 2532–2641.

[50]. Perrin, J., *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, Annales de chimie at de Physique **18** (1909), 5-114.

[51]. Stokes, G.G., *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **9** (1856), pt.2, 8–106.
[52]. Uhlenbeck, G.E. and L. S. Ornstein, *On the theory of Brownian motion*, Phys. Rev. **36** (1930), 823–841.
[53]. Widom, A., *Velocity fluctuations of a hard-core Brownian motion*, Phys. Rev. A **3** (1971), 1394–1396.
[54]. Wiener, N., *Differential space*, J. Math. and Phys. **2** (1923), 131–174.